Colle du 01/06 - Sujet 1
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 1. Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\sigma(M) = a + b + d$. On fixe $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose enfin, pour tout $M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = M + \sigma(M) J$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Préciser une base de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la représentation matricielle de f dans cette base.
4. Montrer que f est un automorphisme.
5. Montrer qu'il existe $\mathscr{B}$ une base de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soit $\varphi : u \to \displaystyle\int_u^{3u} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Etudier la régularité de φ (définition, continuité, prolongement par continuité, $\mathscr{C}^1$).

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 01/06 - Sujet 2
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Démontrer la formule de la matrice du vecteur image.

Exercice 1. Etudier $\varphi : x \to \displaystyle\int_{1/x}^{x} \mathrm{sh}\left(t^2\right) \mathrm{d}t$.

Exercice 2. Soient $f : (x, y) \mapsto (3x + 4y, -x + y, 2x - 2y)$ et $e'_1 = (-1, 0, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 2)$ et $e'_3 = (1, -1, 1)$.

1. Déterminer la matrice de f canoniquement associée à f.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}'}(f)$.

Colle du 01/06 - Sujet 3
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Démontrer la formule de la matrice de la composition.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer f^2 et en déduire que $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$ et de $\operatorname{Ker}(f)$.
3. Montrer qu'il existe $\mathscr{B}$ une base de E telle que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 u^n \operatorname{ch}(u)\,\mathrm{d}u$. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n$.